



جامعة بنها – كلية العلوم – الفصل الدراسي الثاني للعام 2013/2012
امتحان الفرقة الثانية (نظام قديم) شعبة رياضية وفيزياء

الزمن / ثلاث ساعات

المادة / ميكانيكا

أجب عن الأسئلة الآتية : (الدرجات موزعة بالتساوي)

السؤال الأول

- أ- تتحرك نقطة مادية في مستوى وكانت مركبتا سرعتها بالنسبة للمحورين ox, oy اللذين يدوران بسرعة زاوية ثابتة ω هما $4\omega y/5, 4\omega x/5$ علي الترتيب 0 أثبت أن مسار هذه النقطة قطع ناقص وأن الزمن الدوري $010\pi/3\omega$
- ب- تتحرك نقطة مادية في مستوى فإذا كانت مركبتا سرعتها النصف قطرية هي λr وسرعتها المستعرضة $0 \mu\theta$ أوجد معادلة المسار وكذلك مركبات العجلة 0

السؤال الثاني

- أ- استنتج المعادلة التفاضلية لمسار جسيم يتحرك تحت تأثير قوة مركزية جاذبة 0
- ب- يتحرك جسيم على المنحنى $r = a \cos \theta$ أوجد قانون القوة إذا علم أنها قوة مركزية جاذبة 0

السؤال الثالث

- ينزلق جسيم أسفل سيكلويد أملس محوره رأسي ورأسه إلى أسفل 0 فإذا بدأ الجسيم حركته من سكون من الناب فأثبت أن
- أ- السرعة الزاوية لمماس المنحنى عند الجسيم ثابتة 0
- ب- رد فعل المنحنى يتناسب مع نصف قطر الإنحناء 0

السؤال الرابع

- أ- ساق رفيعة منتظمة تتحرك حركة مفصلية لا عائق لها في مستوى رأسي حول طرفها المثبت 0 فإذا بدأ الساق في الوضع الرأسي إلى أسفل بسرعة زاوية ω 0 أوجد
- 1- الشرط اللازم لكي يدور الساق دورات كاملة 0
- 2- الشرط اللازم لكي يصل الساق إلى حالة سكون لحظي عندما يأخذ الوضع الرأسي إلى أعلى وأوجد العلاقة بين θ والزمن عندئذ 0
- ب- أوجد عزم القصور الذاتي لقرص دائري منتظم حول محور عمودي عليه ويمر بمركزه وحول قطر فيه إذا علم أن كثافته القرص ρ ونصف قطره $0 a$

السؤال الخامس

- سقطت قطرة مطر تحت تأثير وزنها في وسط سحابة ساكنة فإذا كانت كتلتها عند اللحظة الزمنية t تساوي m وسرعتها v ومعدل ازدياد كتلتها λmv حيث λ ثابت 0 أثبت أنه عندما تهبط القطرة مسافة x فإن
- $$\lambda v^2 = g(1 - e^{-2\lambda x})$$

ثم أوجد x بدلالة الزمن 0

مع أطيب التمنيات بالنجاح

إجابة اختبار مادة ديناميكا للفرقة الثانية (نظام قديم) كلية العلوم شعبة رياضيات العام الدراسي 2013/2012
الفصل الدراسي الثاني تاريخ الاختبار 2013/6/6 (ورقه امتحانيه) ثلاث ساعات
أستاذ المادة د/ مجدي مصطفى حسين كلية العلوم قسم الرياضيات – جامعة بنها

السؤال الأول الجزء أ

$$\dot{x} - \omega y = \frac{4}{5} \omega y \quad (1)$$

$$\dot{y} + \omega x = \frac{4}{5} \omega x \quad (2)$$

من المعادلتين (1),(2) ينتج أن

$$\dot{x} = \frac{9}{5} \omega y \quad (3)$$

$$\dot{y} = -\frac{1}{5} \omega x \quad (4)$$

بتفاضل المعادلة (3) وبالتعويض في المعادلة (4) نحصل على

$$\ddot{x} = \frac{9}{5} \omega \dot{y} = -\frac{9}{25} \omega^2 x \quad (5)$$

المعادلة (5) تمثل معادلة حركة توافقية زمنية الدوري $2\pi / \frac{3}{5} \omega$ أي أن الزمن الدوري يساوي $10\pi / 3\omega$ وبالمثل بتفاضل المعادلة (4) والتعويض في المعادلة (3) ينتج أن

$$\ddot{y} = -\frac{9}{25} \omega^2 y \quad (6)$$

والمعادلة (6) تمثل أيضا معادلة حركة توافقية بسيطة زمنها الدوري $10\pi / 3\omega$

∴ المسار قطع ناقص له نفس الزمن الدوري $10\pi / 3\omega$ ويمكن إيجاد معادلة المسار مباشرة من المعادلتين (3),(4) بحذف الزمن بينهما

$$\frac{\dot{x}}{\dot{y}} = -9 \frac{y}{x} = \frac{dx}{dy} \Rightarrow x^2 + 9y^2 = c \Rightarrow \therefore \frac{x^2}{c} + \frac{y^2}{c/9} = 1$$

وهذه تمثل معادلة قطع ناقص 0

$$\dot{r} = \lambda r \quad (1) \quad , \quad r\dot{\theta} = \mu\theta \quad (2) \quad \underline{\underline{ب}}$$

من المعادلتين (1),(2) وبفصل المتغيرات والتكامل نحصل على

$$\therefore -\frac{1}{\lambda r} = \frac{1}{\mu} \ln \theta + c \Rightarrow \therefore r = -\frac{\lambda}{\mu} \ln \theta + c_1 \quad (3)$$

حيث c, c_1 ثوابت التكامل 0 والمعادلة (3) هي معادلة المسار 0 ولحساب مركبات العجلة نتبع الآتي

$$\ddot{r} = \lambda \dot{r} = \lambda^2 r \quad , \quad \dot{\theta} = \mu\theta / r \Rightarrow \ddot{\theta} = \mu \frac{r\dot{\theta} - \dot{r}\theta}{r^2} = \mu \frac{\mu\theta - \lambda r\theta}{r^2}$$

∴ مركبة العجلة النصف قطرية هي

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \lambda^2 r - r\mu^2 \frac{\theta^2}{r^2} = \frac{\lambda^2 r^2 - \mu^2 \theta^2}{r}$$

والمركبة المستعرضة للعجلة هي

$$2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 2\lambda r \frac{\mu\theta}{r} + \mu r \frac{\mu\theta - \lambda r\theta}{r^2} = \frac{\mu\theta(\lambda r + \mu)}{r}$$

إجابة السؤال الثاني:

أ- لإيجاد هذه المعادلة نحذف الزمن من المعادلتين (1') ، (2') ولعمل ذلك نستخدم المتغير الجديد $u = 1/r$

$$r = \frac{1}{u} \Rightarrow \therefore \frac{dr}{du} = -\frac{1}{u^2}$$

ومن المعادلة (2') نجد أن $\dot{\theta} = hu^2$

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{du} \frac{du}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -\frac{\dot{\theta}}{u^2} \frac{du}{d\theta} = -r^2 \dot{\theta} \frac{du}{d\theta} = -h \frac{du}{d\theta}$$

$$\therefore \ddot{r} = -h \frac{d}{dt} \left(\frac{du}{d\theta} \right) = -\frac{1}{h} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{du}{d\theta} \right) \frac{d\theta}{dt} = -h^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2}$$

وبالتعويض في المعادلة (1') نجد أن

$$f = h^2 u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) \quad (3)$$

وهذه هي المعادلة التفاضلية للمسار لنقطة تتحرك تحت تأثير قوة مركزية جاذبة 0

ب-

$$r = a \cos \theta \Rightarrow u = \frac{1}{r} = \frac{1}{a} \sec \theta, \quad \frac{du}{d\theta} = \frac{1}{a} \sec \theta \tan \theta, \quad \frac{d^2 u}{d\theta^2} = \frac{1}{a} [\sec^3 \theta + \sec \theta \cdot \tan^2 \theta]$$

$$\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta \Rightarrow \therefore \tan^2 \theta = \sec^2 \theta - 1 \quad \text{ولكن}$$

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} = \frac{1}{a} [\sec^3 \theta + \sec \theta (\sec^2 \theta - 1)] = \frac{2}{a} \sec^3 \theta - \frac{1}{a} \sec \theta$$

$$f = h^2 \cdot \frac{2}{a} \sec^3 \theta \cdot \frac{1}{a^2} \sec^2 \theta = \frac{2h^2}{a^3} \sec^5 \theta$$

إجابة السؤال الثالث:

معادلة الحركة في اتجاه المماس هي

$$m\ddot{s} = -mg \sin \psi$$

بالتعويض عن قيمة s في المعادلة السابقة نجد أن

حيث $\omega = \sqrt{g/4a}$ والمعادلة السابقة تمثل معادلة حركة

توافقية بسيطة حلها على الصورة

$$s = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

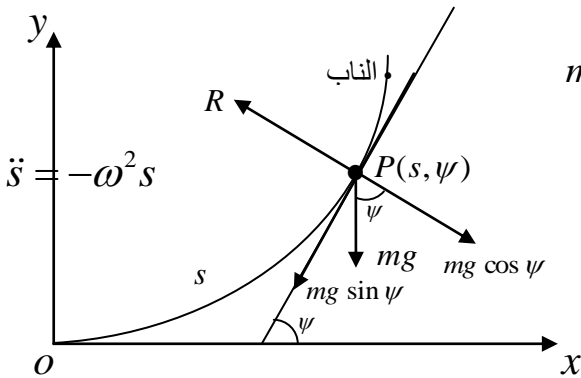
$$\dot{s} = -A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t$$

من الشروط الابتدائية $t=0, s=4a, \dot{s}=0$ نجد أن

$$A = 4a, \quad B = 0$$

أي أن

$$s = 4a \cos \omega t \Rightarrow 4a \sin \psi = 4a \cos \omega t$$



$$\therefore \sin \psi = \cos \omega t \Rightarrow \omega t = \frac{\pi}{2} - \psi$$

$$\therefore \dot{\psi} = -\omega = \text{const.}$$

أي أن السرعة الزاوية لمماس المنحنى ثابتة أثناء الحركة 0 لإيجاد رد الفعل العمودي من معادلة الحركة في الاتجاه العمودي على المماس

$$\frac{mv^2}{\rho} = R - mg \cos \psi$$

$$\therefore s = 4a \sin \psi \Rightarrow \rho = \frac{ds}{d\psi} = 4a \cos \psi$$

$$\therefore s = 4a \cos \omega t \Rightarrow \dot{s} = -4a\omega \sin \omega t$$

$$\therefore \omega t = \frac{\pi}{2} - \psi$$

$$\therefore \dot{s} = -4a\omega \sin\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) = -4a\omega \cos \psi = -\sqrt{4ag} \cos \psi$$

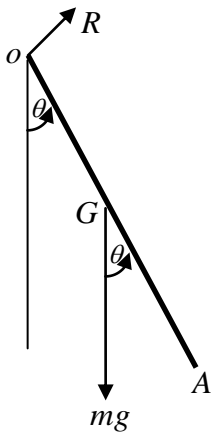
$$\therefore R = \frac{4mag \cos^2 \psi}{4a \cos \psi} + mg \cos \psi = 2mg \cdot \frac{\rho}{4a} = \left(\frac{mg}{2a}\right)\rho$$

$$\therefore R \propto \rho$$

وهو المطلوب أثباته 0

السؤال الرابع:

أ- نفرض ان الساق oA طوله $2a$ وأنه يصنع زاوية θ مع الرأسى إلى أسفل في اللحظة t معادلة الحركة هي



$$I\ddot{\theta} = M$$

$$\frac{4}{3}ma^2\ddot{\theta} = -mg \sin \theta \cdot a$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{3g}{2a} \cos \theta + c_1$$

$$\text{At } \theta = 0, \dot{\theta} = \omega \Rightarrow c_1 = \omega^2 - (3g/2a)$$

$$\dot{\theta}^2 = \omega^2 + \frac{3g}{2a}(\cos \theta - 1) \quad (1)$$

ولكي يعمل الساق دورات كاملة فإن $\dot{\theta}$ يجب أن تكون أكبر من الصفر عندما $\theta = \pi$ أي يجب أن تكون $\omega > \sqrt{3g/a}$ ولكي يصل الساق إلى حالة سكون لحظي عندما يأخذ الوضع الرأسى إلى أعلى

$$\dot{\theta} = 0 \text{ at } \theta = \pi \Rightarrow \omega = \sqrt{3g/a}$$

وهو الشرط اللازم لسكون الساق لحظي وتصبح المعادلة (1)

$$\dot{\theta}^2 = \frac{3g}{a} + \frac{3g}{2a} \cos \theta - \frac{3g}{2a} = \frac{3g}{a} \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

بفصل المتغيرات والتكامل ينتج أن

$$t = 2\sqrt{\frac{a}{3g}} \ln\left(\sec \frac{\theta}{2} + \tan \frac{\theta}{2}\right)$$

ب- نفرض أن ρ هي كتلة وحدة مساحة القرص 0 وأن a هو نصف القطر 0 من التعريف

$$I_o = \int_0^a (2\pi r dr \rho) (r^2) = \frac{1}{2} Ma^2$$

حيث $M = \pi a^2 \rho$ ولكن $I_o = I_x + I_y$ وبما أن x, y هما محوري تماثل $I_x = I_y \Leftarrow$

$$\therefore I_x = I_y = \frac{1}{4} Ma^2$$

إجابة السؤال الخامس

$$\frac{dm}{dt} = \lambda m v$$

$$\therefore F = \frac{d}{dt}(m v) - u \frac{dm}{dt}$$

$\therefore u = 0 \Leftarrow$ السحابة ساكنة \therefore

$$\therefore F = \frac{d}{dt}(m v) \Rightarrow mg = m \frac{dv}{dt} + \lambda m v^2$$

$$\therefore \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx} = g - \lambda v^2$$

$$\therefore -\frac{1}{2\lambda} \log(g - \lambda v^2) = x + c$$

عندما $x=0, v=0$ نجد أن $c = -\frac{1}{2\lambda} \log(g)$

$$\therefore x = \frac{1}{2\lambda} \log \frac{g}{g - \lambda v^2}$$

$$\therefore \lambda v^2 = g(1 - e^{-2\lambda x})$$

(1)

وهو المطلوب أولاً من المعادلة (1) نحصل على

$$\therefore v = \sqrt{\frac{g}{\lambda}} \sqrt{1 - e^{-2\lambda x}}$$

$$\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{1 - e^{-2\lambda x}}} = \sqrt{\frac{g}{\lambda}} \int dt + c = \sqrt{\frac{g}{\lambda}} t + c$$

(2)

باستخدام التعويض $y = e^{-\lambda x}$ ومنها نجد أن

$$\therefore \frac{1}{\lambda} \operatorname{sech}^{-1} y = \sqrt{\frac{g}{\lambda}} t + c$$

عندما $c=0$ إذن $y = e^{-\lambda x} = e^0 = 1 \Leftarrow t = -0, x = 0$

$$\therefore \frac{1}{\lambda} \operatorname{sech}^{-1} y = \sqrt{\frac{g}{\lambda}} t$$

بالتعويض عن $y = e^{-\lambda x}$ نحصل على

$$\therefore x = -\frac{1}{\lambda} \ln(\operatorname{sech} \sqrt{\lambda g t})$$